DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2013.10.005

第35卷第10期 西南大学学报(自然科学版) 2013年10月
Vol. 35 No. 10 Journal of Southwest University (Natural Science Edition) Oct. 2013

文章编号: 1673-9868(2013)10-0067-04

关于 Smarandache-Pascal 数列的几个猜想①

刘宝利

西安航空职业技术学院 计算机工程学院,陕西 阎良 710089

摘要: 对任意数列$\{b_n\}$,它的Smarandache-Pascal数列是通过$\{b_n\}$定义的一个新的数列$\{T_n\}$,其中$T_1 = b_1$,$T_2 = b_1 + b_2$,$T_3 = b_1 + 2b_2 + b_3$. 一般地,当$n \geqslant 2$时,$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot b_{k+1}$,其中$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$为组合数. 利用初等方法以及组合数和Fibonacci数的性质研究并解决猜想: 设$\{T_n\}$是由$\{b_n\} = \{F_{8n+1}\} = \{F_1, F_9, F_{17}, \cdots\}$生成的Smarandache-Pascal数列,则有恒等式$T_{n+1} \equiv 49(T_n - T_{n-1})$,其中$n \geqslant 2$.

关 键 词: Smarandache-Pascal数列; Fibonacci数列; 组合数; 初等方法; 恒等式; 猜想

中图分类号: O156.4 **文献标志码:** A

对任意给定的数列$\{b_n\} = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$,我们通过二项式展开的方式定义一个新的数列$\{T_n\}$: $T_1 = b_1$,$T_2 = b_1 + b_2$,$T_3 = b_1 + 2b_2 + b_3$. 一般地,当$n \geqslant 2$时我们有

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot b_{k+1}$$

其中$C_n^k = \frac{n!}{k(n-k)!}$为组合数.

通过这种方式定义的数列$\{T_n\}$称为Smarandache-Pascal数列. 例如当$\{b_n\} = \{1, 2, 3, \cdots\}$为正整数列时,$T_n = \{(n+1) \cdot 2^{n-2}\} = \{1, 3, 8, \cdots\}$; 当$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = 1$时,$T_n = 2^{n-1}$. 这一数列是由美籍罗马尼亚著名数论专家F. Smarandache在文献[1]中利用数列$\{b_n\}$及二项式的Pascal恒等式构造的. 文献[2]对于一些特殊的数列$\{b_n\}$,如著名的Fibonacci数列$\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\}$的一些子列,通过数值验证提出了一些有关$\{T_n\}$的猜想,其中之一为:

猜想[2] 设$\{b_n\} = \{F_{8n+1}\} = \{F_1, F_9, F_{17}, F_{25}, \cdots\}$. $\{T_n\}$是由$\{b_n\}$生成的Smarandache-Pascal数列,则有递推公式

$$T_{n+1} = 49(T_n - T_{n-1}) \qquad n \geqslant 2$$

这一猜想看起来十分简单、漂亮,而且结果也是有趣的,至少它反映了Fibonacci数列的一些深刻性质,而且在不同的子列上,它表现的性质差别较大. 本文的主要目的是利用初等方法以及组合数的性质研究这一问题,并给予彻底解决. 具体地说也就是证明下面几个结论:

定理1 对任意正整数n,定义

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot F_{8k+1}$$

则有恒等式

$$T_{n+1} \equiv 49(T_n - T_{n-1}) \qquad n \geqslant 2$$

---

① 收稿日期: 2012-05-14
基金项目: 国家自然科学基金(11071194); 陕西省教育厅科学研究计划项目(2013JK0566).
作者简介: 刘宝利(1979-),女,陕西宝鸡人,讲师,主要从事解析数论的研究.

定理2 对任意正整数 n，定义

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot F_{10k+1}$$

则有恒等式

$$T_{n+1} \equiv 125(T_n - T_{n-1}) \qquad n \geqslant 2$$

定理3 对任意正整数 n，定义

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot F_{12k+1}$$

则有恒等式

$$T_{n+1} \equiv 324(T_n - T_{n-1}) \qquad n \geqslant 2$$

显然，我们的方法带有普遍性，也就是说对 Fibonacci 数列的任意子列，我们都可以给出$\{T_n\}$的一个递推公式.

首先需要回顾一下 Fibonacci 数列的定义，即就是 $F_0 = 0$，$F_1 = 1$，$F_2 = 1$，$F_3 = 2$，$F_4 = 3$，当 $n \geqslant 2$ 时有递推公式：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. 有关 Fibonacci 数的进一步性质可参阅文献[3-4].

定理1的证明 对任意正整数 $n > 2$，由 T_n 的定义及二项式的性质 $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ 可得

$$\begin{aligned} T_{n+1} &\equiv \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot F_{8k+1} = \\ & 1 + F_{8n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) F_{8k+1} = \\ & \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot F_{8k+1} + \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-1}^k \cdot F_{8k+9} + F_{8n+1} = \\ & T_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k F_{8k+9} \end{aligned} \tag{1}$$

注意到

$$\begin{aligned} F_{8k+9} &= F_{8k+8} + F_{8k+7} = \\ & 2F_{8k+7} + F_{8k+6} = 3F_{8k+6} + 2F_{8k+5} = \\ & 5F_{8k+5} + 3F_{8k+4} = 8F_{8k+4} + 5F_{8k+3} = \\ & 13F_{8k+3} + 8F_{8k+2} = 21F_{8k+2} + 13F_{8k+1} = 34F_{8k+1} + 21F_{8k} \end{aligned}$$

由(1)式及 T_n 的定义可得恒等式：

$$\begin{aligned} T_{n+1} &\equiv T_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot (34F_{8k+1} + 21F_{8k}) = \\ & T_n + 34\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot F_{8k+1} + 21\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot F_{8k} = \\ & 35T_n + 21\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot F_{8k} \end{aligned} \tag{2}$$

另一方面，注意到 $F_0 = 0$，

$$\begin{aligned} F_{8k+8} &= F_{8k+7} + F_{8k+6} = \\ & 2F_{8k+6} + F_{8k+5} = 3F_{8k+5} + 2F_{8k+4} = \\ & 5F_{8k+4} + 3F_{8k+3} = 8F_{8k+3} + 5F_{8k+2} = \\ & 13F_{8k+2} + 8F_{8k+1} = 21F_{8k+1} + 13F_{8k} \end{aligned}$$

我们有恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot F_{8k} \equiv F_{8(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-2} C_{n-1}^k \cdot F_{8k} =$$

$$F_{8(n-1)}+\sum_{k=1}^{n-2}(C_{n-2}^{k}+C_{n-2}^{k-1})\cdot F_{8k}=$$
$$\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot F_{8k}+\sum_{k=0}^{n-3}C_{n-2}^{k}\cdot F_{8k+8}+F_{8(n-1)}=$$
$$\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot F_{8k}+\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot(21F_{8k+1}+13F_{8k})=\tag{3}$$
$$14\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot F_{8k}+21T_{n-1}$$

由(2)式也可得到

$$T_n\equiv 35T_{n-1}+21\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot F_{8k}\tag{4}$$

结合(2),(3)式及(4)式可得

$$T_{n+1}\equiv 35T_n+21(21T_{n-1}+14\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}F_{8k})=$$
$$35T_n+441T_{n-1}+14(T_n-35T_{n-1})$$

或者递推公式

$$T_{n+1}\equiv 49(T_n-T_{n-1})\qquad n\geqslant 2$$

定理 1 得证.

定理 2 的证明　利用证明定理 1 的方法，我们不难推出恒等式

$$T_{n+1}\equiv\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}\cdot F_{10k+1}=T_n+\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}\cdot F_{10k+11}=$$
$$90T_n+55\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}\cdot F_{10k}\tag{5}$$

$$T_n\equiv T_{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot F_{10k+11}=90T_{n-1}+55\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot F_{10k}\tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}\cdot F_{10k}\equiv\sum_{k=1}^{n-2}(C_{n-2}^{k}+C_{n-2}^{k-1})\cdot F_{10k}+F_{10(n-1)}=$$
$$\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot F_{10k}+\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot F_{10k+10}=\tag{7}$$
$$55T_{n-1}+35\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot F_{10k}$$

结合(5),(6)式及(7)式立刻推出恒等式

$$T_{n+1}\equiv 90T_n+55\cdot 55\ T_{n-1}+35(T_n-90T_{n-1})$$

或者恒等式

$$T_{n+1}\equiv 125(T_n-T_{n-1})$$

定理 2 得证.

定理 3 的证明　由数列$\{F_1, F_{13}, F_{25}, \cdots, F_{12k+1}, \cdots\}$生成的数列$\{T_n\}$，我们可以得到

$$T_{n+1}\equiv\sum_{k=0}^{n}C_{n}^{k}\cdot F_{12k+1}=234T_n+144\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}\cdot F_{12k}\tag{8}$$

$$T_n\equiv 234T_{n-1}+144\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot F_{12k}\tag{9}$$

以及恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}\cdot F_{12k}\equiv 144T_{n-1}+90\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^{k}\cdot F_{12k}\tag{10}$$

结合(8),(9)式及(10)式可以推出恒等式

$$T_{n+1} \equiv 234T_n + 144^2 T_{n-1} + 90(T_n - 234T_{n-1})$$

或者简化后的恒等式

$$T_{n+1} \equiv 324(T_n - T_{n-1}) \qquad n \geqslant 2$$

定理3得证.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] AMARNATH M, CHARLES A. Generalized Partitions and New Ideas on Number Theory and Smarandache Sequences [M]. Phoenix: Hexis, 2005: 79.

[3] WIEMANN M, COOPER C. Divisibility of an F-L Type Convolution. Applications of Fibonacci Numbers [M]. Dordrecht: Kluwer Acad Publ, 2004: 267-287.

[4] MA Rong, ZHANG Wen-peng. Several Identities Involving the Fibonacci Numbers and Lucas Numbers [J]. The Fibonacci Quarterly, 2007, 131(1): 164-170.

[5] 刘宝利. 关于Smarandache结构数列 [J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版, 2012, 41(3): 241-243.

[6] 刘宝利. 关于F. Smarandache因子分拆问题 [J]. 纺织高校基础科学学报, 2012, 25(4): 407-409.

[7] 郇 乐. Smarandache函数及其相关函数的性质 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2013, 35(4): 67-70.

On Several Conjectures Related to the Smarandache-Pascal Sequences

LIU Bao-li

Department of Computer Engineering, Xi'an Aeronautical Polytechnic Institute, Yanliang Shaanxi 710089, China

Abstract: For any fixed sequence $\{b_n\}$, its Smarandache-Pascal sequences are a new sequence defined by $\{b_n\}$, in which $T_1 = b_1$, $T_2 = b_1 + b_2$ and $T_3 = b_1 + 2b_2 + b_3$. Generally, $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot b_{k+1}$ for all $n \geqslant 2$, where $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ is the combination number. In this paper, we use the elementary method and the properties of the combination number and Fibonacci number to prove the conjecture: For $\{b_n\} = \{F_{8n+1}\}$, we have the identity $T_{n+1} \equiv 49(T_n - T_{n-1})$ for all $n \geqslant 2$.

Key words: Smarandache-Pascal sequence; Fibonacci sequence; combination number; elementary method; identity; conjecture

责任编辑 廖 坤